Παράδειγμα 1^0

Η διάμετρος X ενός ανταλλακτικού σε γεωργικό ελκυστήρα που παράγεται σε σειρά αποτελεί τυχαία μεταβλητή με μέσο $\mu = 15\,\text{mm}$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1\,\text{mm}$. Κατά κανονικά χρονικά διαστήματα παίρνουμε από την παραγωγή δείγματα μεγέθους $n = 100$ και μετρούμε τη διάμετρο κάθε ανταλλακτικού. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές τη μέση διάμετρο των δειγμάτων.

α) Να βρεθεί η κατανομή την οποία ακολουθεί η $\overline{X}$

β) Να βρεθεί ο μέσος και η τυπική απόκλιση στην κατανομή του μέσου, δηλαδή η $\mu_{\overline{x}}$ και η $\sigma_{\overline{x}}$.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ώστε η διάμετρος ενός ανταλακτικού που επιλέγεται τυχαία να είναι μεγαλύτερη των 15,1 mm.

δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ώστε η μέση διάμετρος ενός τυχαίου δείγματος (μεγέθους 100) να είναι μεγαλύτερη των 15,1 mm.

ε) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ώστε η μέση διάμετρος ενός τυχαίου δείγματος (μεγέθους 100) να βρίσκεται μεταξύ 14,8 και 15 mm

Λύση

α) Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, η κατανομή των μέσων τυχαίων δειγμάτων με μέγεθος σχετικά μεγάλο (εδώ έχουμε $n=100$) δεν εξαρτάται από την κατανομή του αρχικού πληθυσμού, αλλά ακολουθεί, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, την κανονική κατανομή με μέσο $\mu_{\overline{X}}$ και διακύμανση $\sigma_{\overline{x}}^2$. Συμβολικά γράφουμε:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_{\overline{X}}, \sigma_{\overline{x}}^2\right), \quad \text{όπου} \ \ \mu_{\overline{X}} = \mu \ \ \text{και} \ \ \sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

β) Επειδή δόθηκε $\mu = 15\ \mathrm{mm}$, $\sigma = 1\ \mathrm{mm}$ και $n = 100$ από τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$\mu_{\overline{X}} = 15\ \mathrm{mm} \ \ \text{και} \ \ \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

γ) $P(X > 15{,}1) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{15{,}1-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{15{,}1-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{15{,}1-15}{1}\right) =$

$$= P(Z > 0{,}1) = 1 - P(Z \leq 0{,}1) = 1 - F_Z(0{,}1) =$$

$$= 1 - 0{,}53983 = 0{,}46017 \text{ (από τον πίνακα 3/σελ. 431).}$$

δ) $P(\bar{X} > 15{,}1) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} > \frac{15{,}1-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = P\left(Z > \frac{15{,}1-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = P\left(Z > \frac{15{,}1-15}{0{,}1}\right) =$

$$= P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - F_Z(1) =$$

$$= 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866 \text{ (από τον πίνακα 3/σελ. 431).}$$

ε) $P(14{,}8 < \bar{X} < 15) = P\left(\frac{14{,}8-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} < \frac{\bar{X}-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} < \frac{15-\mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right) =$

$$= P\left(\frac{14{,}8-15}{0{,}1} < Z < \frac{15-15}{0{,}1}\right) = P(-2 < Z < 0) =$$

$$= P(Z < 0) - P(Z < -2) = P(Z < 0) - P(Z > 2) =$$

$$= P(Z < 0) - \left[1 - P(Z \leq 2)\right] = P(Z < 0) + P(Z \leq 2) - 1 =$$

$$= F_Z(0) + F_Z(2) - 1 = 0{,}5 + 0{,}97725 - 1 = 0{,}47725\,.$$